Keine Ahnung von Monotonie

Was bedeutet

Monotonie von Funktionen

Teil 1

Anschauliche Einführung

Rechentraining mit ganzrationalen Funktionen
2. bis 5. Grades

Datei 41140

Stand: 21. Januar 2021

Friedrich Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort

Die “Keine Ahnung –Texte“ sind für Schüler gedacht, die Schwierigkeiten mit diesem Thema haben. Hier geht es um Monotonie, ein grundlegender Begriff, der leider zu schnell abgetan wird und dann auch schnell vergessen ist.
Ich zeige auf einfachem Niveau, wie man die Monotonie anschaulich klar machen kann, und im zweiten Abschnitt wie man sie untersuch en kann.
Hier, im 1. Text, werden ganzrationale Funktionen 2. Bis 5. Grades untersucht.
Für die Monotonie-Untersuchungen verwende ich die Parabelmethode und Vorzeichentabellen.

Hinweis: Quadratische Gleichungen löse ich immer mit der „Mitternachtsformel“ $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Inhalt

Die Funktionen aus Beispiel 3 bis Beispiel 13 wurden dem Text 42160 entnommen. Dort werden die Kurvendiskussionen zu 22 ganzrationalen Funktionen 3. Bis 5. Grades durchgerechnet.

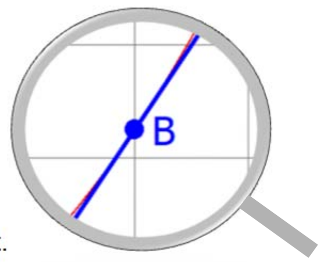
1 Anschauliche Überlegungen – wichtiger Lesestoff

Mit Funktionen kann man Zusammenhänge von Größen beschreiben. Bei der Monotonie geht es darum, dass man feststellen möchte, wie sich die Änderung einer Größe auf die andere auswirkt.

Beispiele: Wenn man einen Stab erwärmt, dehnt er sich aus: Wie hängt die Verlängerung von der Temperaturzunahme ab?
Wenn man ein Gas in einem abgeschlossenen Gefäß erhitzt, nimmt der Druck zu. Wie hängt der Druck von der Temperatur ab?
Wenn mehr Milch produziert wird, sinkt der Preis. …
Wenn ein Zug schneller fährt, nimmt die Fahrzeit ab. …

Der Leser stellt nach diesen Beispielen schon fest, um was es hier geht: Um Zu- oder Abnahme von Funktionswerten. Wenn zwei Größen funktional zusammenhängen, bewirkt die Veränderung der einen Größe in der Regel eine Veränderung der anderen. Man will untersuchen können, wie Zu- oder Abnahme von Funktionswerten stattfinden.

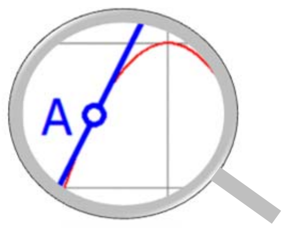
Es gibt Methoden, mit denen man diese Zusammenhänge beschreiben und berechnen kann.
Dazu benötigt man die 1. Ableitungsfunktion, mit der man ja Tangentensteigungen berechnet.



Etwa an der Funktion $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 6$ mit der Ableitung $f'(x) = \frac{1}{2}x - 2$.

1. Fall: Wir betrachten die Stelle x = 7. Dort ist $f(7) = \frac{17}{4} = 4{,}25$.
Im zugehörigen Kurvenpunkt B ist die Tangente blau eingezeichnet.
Die Lupe zeigt einen kleinen Ausschnitt um B herum. Die Tangente
In B steigt, denn dort hat die Kurve den Anstieg $f'(7) = \frac{1}{2} \cdot 7 - 2 = 1{,}5$.
Die Lupe zeigt, dass in diesem Ausschnitt Tangente und Kurve steigen.

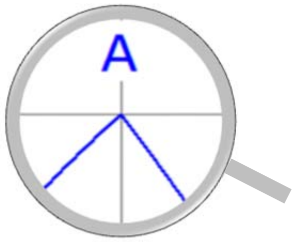
Ich halte fest: Wegen $f'(7) > 0$ steigt die Tangente an der Stelle 7 und in einer (zumindest kleinen) Umgebung von 7 steigt auch die Kurve, d.h. wachsen die Funktionswerte. Wichtig ist die Einsicht, dass die Aussage $f'(7) > 0$ nur eine Folgerung auf eine hinreichend kleine Umgebung zulässt.
Denn ein Kurvenverlauf könnte auch so aussehen:



Das gehört zur Funktion $f(x) = -2x^2 + 8x - 3$ mit $f'(x) = -4x + 8$.
Die Tangente in A bei x = 1,5 hat die Steigung $f'(x) = 2$.
Die Tangente steigt also im Bereich der Lupe.
Das kann man aber nicht mehr auf die Funktion f übertragen. Denn Die Kurve bzw. die Funktion f steigt nur bis x = 2. Dann nehmen die Werte von f wieder ab.
Daher muss man sich merken:

Wenn $f'(a) > 0$ ist, dann nehmen die Werte von f *in einer hinreichend kleinen Umgebung* von f zu.

Es gibt eine Falle:



Die Lupe zeigt bei einer anderen Funktion an der Stelle 2 (bei A) einen Knick. Wenn man sich der Stelle 2 von links nähert, nähern sich die Tangentensteigungen dem Wert $f'(2) = 1$.

Aber in A knickt die Kurve ab und hat eine zweite Tangente von rechts mit negativer Steigung. Solches Verhalten macht die Beschreibung der Zu- bzw. Abnahme etwas schwieriger. Man kann hier nicht folgern:

Da $f'(2) > 0$, wächst f in einer kleinen Umgebung von 2 streng monoton, denn rechts von 2 fällt sie.

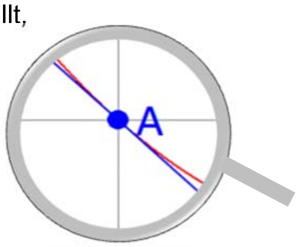
Wenn so etwas vorliegt, sagen die Mathematiker, **f ist dort nicht differenzierbar.**

Man kann also von $f'(a) > 0$ nur dann auf die Zunahme in einer kleinen Umgebung von a schließen, wenn f differenzierbar ist. Glücklicherweise sind alle ganzrationalen Funktionen differenzierbar, und die gebrochen rationalen Funktionen in ihrem Definitionsbereich auch

2.. Fall:

Zurück zu unserer ersten Funktion: $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 6$, ihre Ableitung ist $f'(x) = \frac{1}{2}x - 2$.

Wir betrachten die Stelle x = 2. Dort ist $f(2) = 3$. Die Tangente in A fällt, denn ihr Anstieg ist $f'(2) = -1$, also negativ.



Und weil f differenzierbar ist, gilt dies dann auch zumindest in einer kleinen Umgebung von 2, was auch die Lupe zeigt.

Zusammenfassung:

Ist f an der Stelle a differenzierbar, dann folgt

aus $f'(a) > 0$, dass f in einer Umgebung von a streng monoton wächst,

aus $f'(a) < 0$, dass f in einer Umgebung von a streng monoton fällt.

Dies kann man übertragen auf Intervalle:

Ist f in einem Intervall $[x_1 ; x_2]$ differenzierbar, dann folgt

aus $f'(x) > 0$ in $[x_1 ; x_2]$, dass f in diesem Intervall streng monoton wächst,

aus $f'(x) < 0$ in $[x_1 ; x_2]$, dass f in diesem Intervall streng monoton fällt.

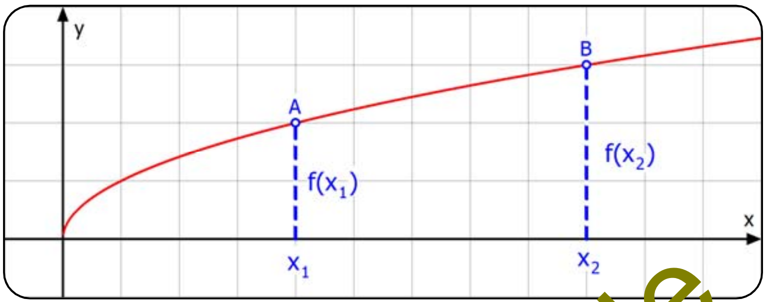
Aber was bedeutet „streng monoton“ wachsen bzw. fallen?

Die Abbildung zeigt das Schaubild der Funktion $f(x)=\sqrt{x}$. Ihre Ableitung ist $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Da für x > 0 auch $\sqrt{x}>0$ ist, liefert die 1. Ableitung für x > 0 positive Tangentensteigungen.

Wir können also folgern:

Für x > 0 ist $f'(x)>0$, d. h.
f **wächst streng monoton**.



Die Abbildung zeigt, was das heißen soll:

Zuerst anschaulich formuliert:

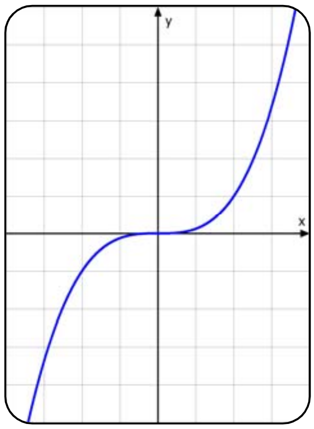
Je größer der x-Wert, desto größer der Funktionswert.

Mathematisch formuliert man das mit Ungleichungen so:

Wenn aus in einem Intervall aus $x_1<x_2$ stets folgt $f(x_1)<f(x_2)$,
dann wächst f in diesem Intervall streng monoton.

Für den Leser bedeutet das, dass man für Monotonie-Untersuchungen Ungleichungen der Form $f'(x)>0$ oder $f'(x)<0$ lösen muss. Das wird im Folgenden geübt.

$f(x)=\frac{1}{8}x^3$



Zusatz: Wenn eine Funktion dieses Verhalten zeigt, also an einer Stelle eine waagrechte Tangente hat, $f'(0)=0$, dann wächst sie zwar durchgehend, denn der Verlauf an der Stelle 0 ist in einem unsichtbar kleinen Intervall horizontal, dann sagt man hier:

f wächst in $\mathbb{R}$ monoton.

Man lässt also dann das Wort „streng“ weg.

2 Rechenübungen zur Monotonie

2.1 Quadratische Funktionen

Beispiel 1: $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 6$

$f'(x) = \frac{1}{2}x - 2$

Wo wächst f streng monoton? Bedingung:

$f'(x) > 0$

$\frac{1}{2}x - 2 > 0$

$\frac{1}{2}x > 2$

$x > 4$

Wo fällt f streng monoton? Bedingung:

$f'(x) < 0$

$\frac{1}{2}x - 2 < 0$

$\frac{1}{2}x < 2$

$x < 4$

Ergebnis: Für $x > 4$ wächst f streng monoton, für x < 4 fällt f streng monoton.

Zusatz:

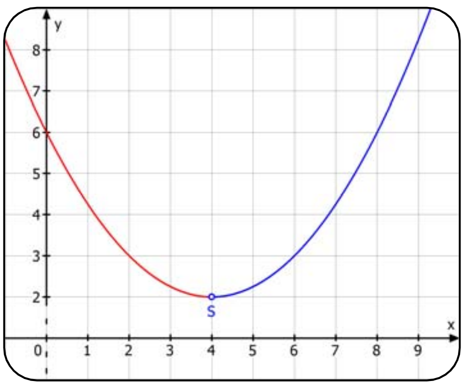
Da quadratische Funktionen als Schaubild stets eine Parabel haben, kann man hier folgende Kurzlösung erstellen:

Gegeben ist $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 6$ mit $f'(x) = \frac{1}{2}x - 2$.

Berechnung des Scheitels: $f'(x) = 0 \iff \frac{1}{2}x - 2 = 0 \iff x_S = 4$

Wichtige Begründung zum Aufschreiben:

Da die Parabel nach oben geöffnet ist und der Scheitel bei x = 4 liegt, wächst f für $x > 4$ streng monoton, und für x < 4 fällt f streng monoton.



Beispiel 2:

$f(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 2x + 6$

$f'(x) = -\frac{4}{3}x + 2$

Wo wächst f streng monoton? Bedingung:

$$f'(x) > 0$$
$$-\frac{4}{3}x + 2 > 0$$
$$-\frac{4}{3}x > -2 \quad | \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)$$
$$x < -2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)$$
$$x < \frac{3}{2}$$

Wo fällt f streng monoton? Bedingung:

$$f'(x) < 0$$
$$-\frac{4}{3}x + 2 < 0$$
$$-\frac{4}{3}x < -2 \quad | \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)$$
$$x > \frac{3}{2}$$

Ergebnis: Für $x < \frac{3}{2}$ wächst f streng monoton, für $x > \frac{3}{2}$ fällt f streng monoton.

Zusatz:

Da quadratische Funktionen als Schaubild stets eine Parabel haben, kann man hier folgende Kurzlösung erstellen:

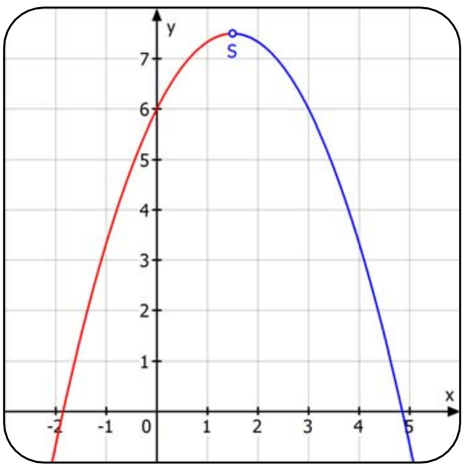
Gegeben ist $f(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 2x + 6$ mit $f'(x) = -\frac{4}{3}x + 2$.

Berechnung des Scheitels: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{4}{3}x + 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{4}{3}x_S = 2 \Leftrightarrow x_S = \frac{3}{2}$

Wichtige Begründung:

Da die Parabel <u>nach unten</u> geöffnet ist und der Scheitel bei $x_S = \frac{3}{2}$ liegt,

wächst f für $x < \frac{3}{2}$ streng monoton, und fällt für $x > \frac{3}{2}$ streng monoton.



2.2 Funktionen 3. Grades

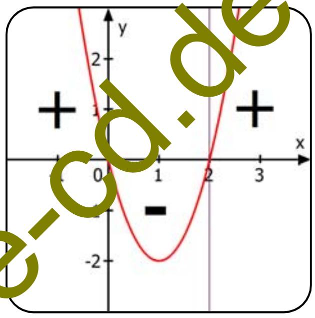
Beispiel 3: $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + 4$

$f'(x) = 2x^2 - 4x$

Monotonie-Untersuchung

Zuerst die Nullstellen von f': $2x(x-2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 0,\ x_2 = 2$

(1) Verwendung der anschaulichen Parabelmethode:

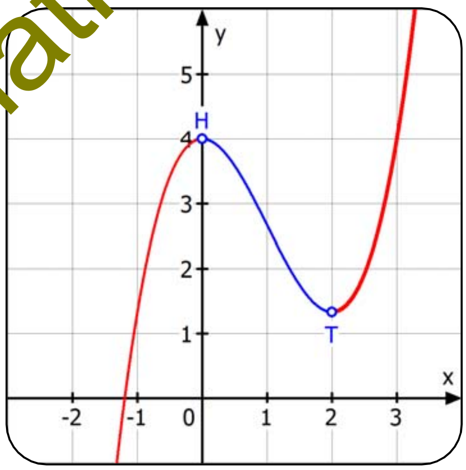


Das Schaubild von f' ist eine nach oben geöffnete Parabel mit den Nullstellen 0 und 2. Also hat f' zwischen diesen Nullstellen negative Werte und im Außenbereich positive.

Ergebnis:

$f'(x) > 0$ für x < 0 und für x > 2. Dort wächst f streng monoton.

$f'(x) < 0$ für 0 < x < 2. Dort fällt f streng monoton.



(2) Verwendung einer Vorzeichentabelle:

Dazu muss man den Ableitungsterm faktorisieren:

$f'(x) = 2x(x-2)$

Das Vorzeichen von f' hängt davon ab, welche Vorzeichen die beiden Faktoren $2x$ und $(x-2)$ haben.

x		0		2	
$2x$	−	0	+		+
$(x-2)$	−		−	0	+
$f'(x)$	+	0	-	0	+

Ergebnis: $f'(x) > 0$ für x < 0 und für x > 2. Dort wächst f streng monoton.

$f'(x) < 0$ für 0 < x < 2. Dort fällt f streng monoton.

Beispiel 4: $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + 3x + 2$

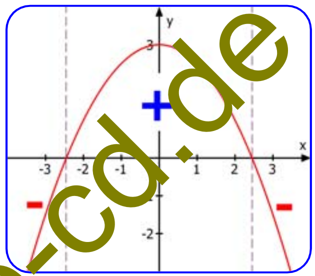
$$f'(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3$$

Monotonie-Untersuchung

Zuerst die Nullstellen von f': $f'(x) = 0 \iff -\frac{1}{2}x^2 + 3 = 0 \iff x^2 = 6$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{6} \;(\approx 2{,}45)$$

(1) Verwendung der anschaulichen Parabelmethode:



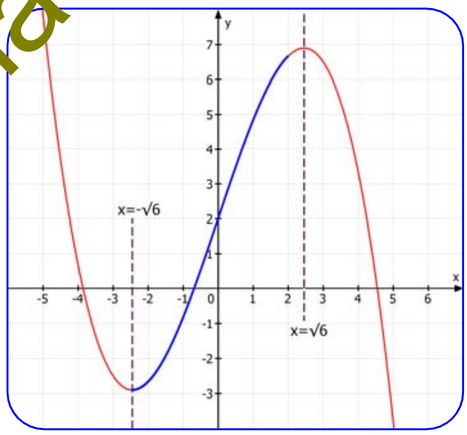
Das Schaubild von f' ist eine nach unten geöffnete Parabel mit den Nullstellen $-\sqrt{6}$ und $\sqrt{6}$. Also hat f' zwischen diesen Nullstellen positive Werte und im Außenbereich negative.

Ergebnis:

$f'(x) < 0$ für $x < -\sqrt{6}$ und für $x > \sqrt{6}$. Dort fällt f streng monoton.

$f'(x) > 0$ für $-\sqrt{6} < x < \sqrt{6}$. Dort wächst f streng monoton.

(2) Verwendung einer Vorzeichentabelle:



Dazu muss man den Ableitungsterm faktorisieren:

$$f'(x) = -\frac{1}{2}(x^2 - 6) = -\frac{1}{2}(x - \sqrt{6})(x + \sqrt{6})$$

Das Vorzeichen von f' hängt davon ab, welche Vorzeichen die drei Faktoren haben.

x		$-\sqrt{6}$		$\sqrt{6}$	
$-\frac{1}{2}$	$-$		$-$		$-$
$x+\sqrt{6}$	$-$	0	$+$		$+$
$x-\sqrt{6}$	$-$		$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Ergebnis: $f'(x) < 0$ für $x < -\sqrt{6}$ und für $x > \sqrt{6}$. Dort fällt f streng monoton.

$f'(x) > 0$ für $-\sqrt{6} < x < \sqrt{6}$. Dort wächst f streng monoton.